

МЕТОД ОБОБЩЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ

А.А Коновалов

Институт проблем освоения Севера СО РАН, 625003, Тюмень, а/я 2774

Введение. Эффективным инструментом анализа природных систем является приведение их характеристик к относительному (нормализованному) виду:

$$j = (x - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}), \quad (1)$$

где x , x_{\max} и x_{\min} – текущее, максимальное и минимальное размерное значение наблюдаемого показателя, причем часто $x_{\min} \approx 0$; j - его текущее значение в относительном виде.

С помощью (1) все множество переменных заключается в наглядно представимый интервал $0 \dots 1$. Это резко сокращает объем фактических данных, необходимый для установления количественных связей между ними, позволяет корректно сравнивать разнородные и разноразмерные величины и делает решение, полученное для каких-нибудь одних условий, универсальным, пригодным для множества им подобных. При этом раскрываются общие закономерности развития систем.

Выражение (1) широко применяется в технических дисциплинах при математическом описании процессов и состояний в обобщенных переменных в качестве *критерия подобия симплексного* типа, имеющего вид отношения параметров одной размерности [1]. Статья посвящена реализации этого метода для аппроксимации двухсторонних связей параметров развивающихся систем разной природы. Рассмотрены основные типы сглаженных эволюционных кривых – монотонного и циклического типов.

Циклические системы. Жизненный цикл земных систем складывается из циклов меньших периодов. Наиболее заметную (наблюдаемую) роль в их развития играют вращательные циклы в системе Солнце – Земля – Луна: годовой, суточный и месячный (лунный), основной константой (инвариантом) которых является число 12: год состоит из 12 месяцев, месяц – из $30 = 12 \ln 12$ суток, сутки из $12 \cdot 2$ часов. С некоторым допущением в этот ряд можно включить 11...12 летний цикл Вольфа, наиболее явственный цикл солнечной активности. Лунный (логарифмический) инвариант ($\ln 12$) прослеживается до микроуровня: период тепловых колебаний атомов $\tau_a \approx 10^{13} \text{с} \approx 12^{12} \text{с}$, тогда $\ln \tau_a \approx 12 \ln 12 \approx 30$.

В сглаженном виде графическое изображение жизненного цикла имеет куполообразную форму, составленную из двух более или менее симметричных монотонных кривых (ветвей), отображающих подъем (расцвет, молодость) и спад (закат, деградацию, старость). Срединная часть цикла - относительно пологий участок перехода одной ветви развития в другую ассоциируется со зрелостью системы, когда она обладает максимальной производительностью,

жизнеспособностью и устойчивостью. Примеры обобщения параметров начнем с наиболее очевидных - климатических циклов, вызванных годовым и суточным вращением Земли.

1. На рис.1а приведен годовой и суточный (в июле) ход относительной температуры воздуха (j_t) в Тобольске, а на рис.2.1б – годовой и суточный (по часовым интервалам в сумме за год) ход относительной продолжительности солнечного сияния (j_c), там же [2]. Величины j_t и j_c отложены на вертикальных осях графиков. Размерное время (τ) годового (месяцы) и суточного (часы) циклов, а также безразмерное (j_τ), отложены на горизонтальных осях. Безразмерные параметры рассчитаны по формуле (1). Исходные данные - максимальные и минимальные значения 1) среднемесячной и 2) среднесуточной (в июле) температуры воздуха, а также 3) годовой и 4) суточной продолжительности солнечного сияния (первое число - максимум, второе – минимум, всего 4 варианта) равны: 1) 18 и минус 18,5 (°C); 2) 21,3 и 14,5 (°C); 3) 298 и 26 (час); 4)168 и 0 (час). Анализ графиков на рис.1 (и на всех последующих) проводился по стандартной программе EXCEL. Он показал, что они с высокой достоверностью описываются полиномами 4-й степени:

$$j_t = 16,8 j_\tau^4 - 34,80 j_\tau^3 + 18,9 j_\tau^2 - 0,82 j_\tau \quad (2)$$

$$j_c = 13,2 j_\tau^4 - 28,74 j_\tau^3 + 16,2 j_\tau^2 - 0,61 j_\tau \quad (3)$$

Судя по рис.1, суточный и годовой ход элементов климата одной размерности, например температуры, выраженных в относительном виде, почти идентичны, а разноразмерных, например температуры и продолжительности солнечного сияния – примерно (качественно) подобны.

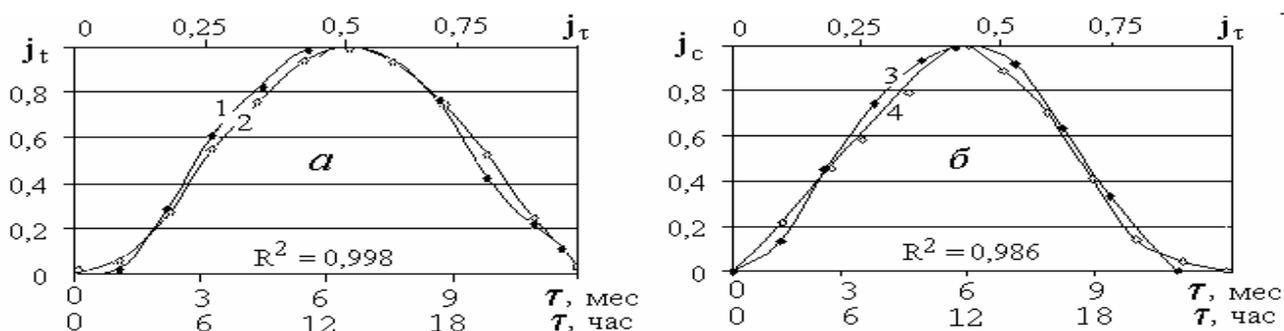


Рис.1. Годовой и суточный (в июле) ход относительной температуры воздуха (j_t) - а, а также годовой и суточный ход относительной продолжительности солнечного сияния (j_c) - б в Тобольске (значки на линиях – фактические данные, линии – их аппроксимации, 1...4 номера вариантов (см. в тексте), R^2 – достоверность аппроксимации).

2. Сложные таксоны (виды, роды, семейства... и т. д.), как и отдельные особи, проходят в своем развитии стадии молодости, зрелости и старости. Об этом свидетельствует график пространственно-временного распространения 140 вымерших видов новозеландских моллюсков, живших примерно от 40 до 3 млн. лет назад - рис. 2а [3]. График имеет

куполообразный вид, типичный для эволюционного (жизненного) цикла с участками роста, короткого расцвета и упадка. На его горизонтальной оси отложено относительное время в долях от общей продолжительности жизни вида или рода. На вертикальной - экстремальные и средние значения доли палеонтологических коллекций геологического возраста, в которых присутствует “усредненный” вид или род (встречаемость V_c). В частности, средние значения V_c изменяются от 0,015 до 0,036 для видов и от 0,02 до 0,069 для родов. По нормализованным значениям этих показателей нами построен обобщенный график жизненного цикла моллюсков (рис.2б). Все экспериментальные точки на этом графике с практической точностью ложатся на одну кривую, как на видовом, так и на родовом уровне, которая с высокой достоверностью описывается полиномом 4-й степени:

$$j_{bc} = 10,4j_{\tau}^4 - 20,62j_{\tau}^3 + 9,22j_{\tau}^2 + 0,88j_{\tau} + 0,15 \quad (4)$$

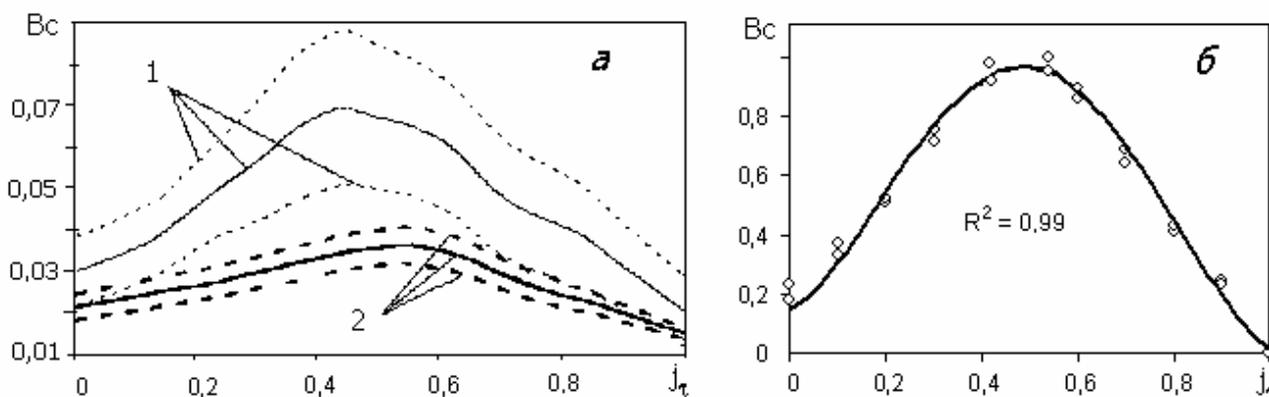


Рис. 2. Зависимость обобщенной встречаемости вида и рода моллюсков j_{bc} от условного времени (j_{τ}).

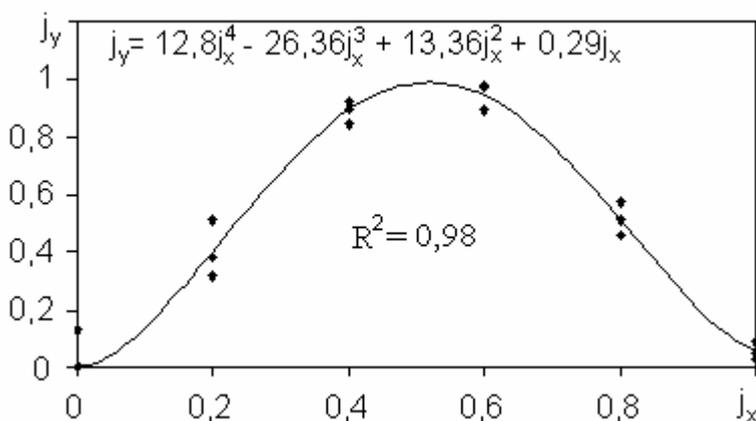


Рис.3. Объединенный график циклов по рис.1-2.

На рис. 3 дан объединенный график всех трех рассмотренных циклов. Несмотря на разные числовые коэффициенты в их уравнениях, точки на графиках располагаются довольно близко друг к другу. Формула объединенного графика, также представляющая собой полином 4-й степени, записана на графике. Учитывая ее разнородную основу, эту формулу в первом

приближении можно описать любые циклы, выраженные через нормализованные переменные. Отметим общую особенность полиномов, описывающих циклы – сумма их положительных и отрицательных коэффициентов всегда примерно равна нулю. Так во всех четырех формулах по порядку их перечисления имеем: 35,7 и -35,6; 29,41 и - 29,35; 33,88 и -33,83; 26,41 и -26,36. Небольшая разница между положительными и отрицательными коэффициентами характеризует асимметрию цикла. Как будет показано ниже, в уравнениях монотонных кривых, образующих циклические, алгебраическая сумма подобных коэффициентов всегда равна единице.

Монотонные кривые и Обобщенные Золотые Сечения. При анализе монотонных кривых изменения параметров различных систем, сразу же бросается в глаза явная связь численных коэффициентов их уравнений с Обобщенными Золотыми сечениями (ОЗС). Рассмотрим этот феномен и его физическую сущность подробнее.

Системы не полностью заполнены веществом. Часть их емкости остается условно пустой, свободной. Условно потому, что на самом деле в ней “растворены” (взвешены) мельчайшие частицы. Их размеры, масса и время существования суммарно меньше одной частицы, принятой за элементарную, и не поддаются измерению. Свободное пространство используется частицами для отправления своих “жизненных ” функций – колебаний (в широком смысле). Выразим емкость системы и составляющие ее вещественную и свободную части в относительном (нормализованном по единице) виде:

$$1 = Y + \chi = Y + X^n, \quad (5)$$

где Y и $\chi = X^n$ – свободная и занятая веществом части емкости, n – количество элементов (субсистем, компонентов, ассоциаций прочносвязанных молекул и т.п) в системе, X - среднее геометрическое из их числа.

Формула (5) отражает противостояние Y и $\chi = X^n$ - абстракций, под которыми можно понимать любые оппозиции, выраженные в относительном виде: связанную и свободную или кинетическую и потенциальную энергии, энтропию и неэнтропию, недостаточность и избыточность, вероятность и невероятность и т.п. При всех n с увеличением X величина Y уменьшается. Существуют точки, в которой они сравниваются: $Y=X=\Phi$ - **рис.3**.

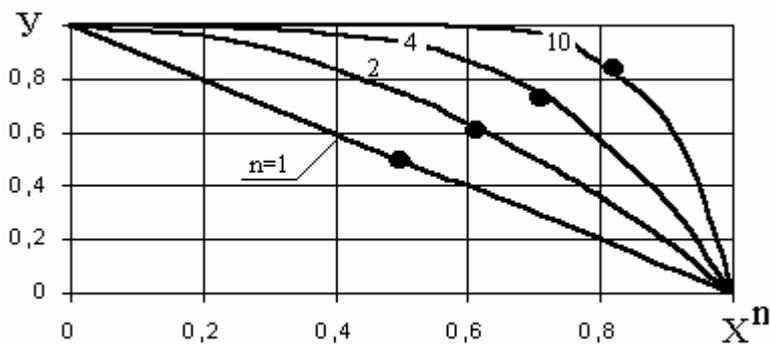


Рис. 3. Зависимость Y от X при разных n (кружки соответствуют n , при которых $Y=X$)

Очевидно, что в этих точках система устойчиво уравновешена (гармонизирована) с внешней средой и составляющими ее подсистемами и обладает максимальной долговечностью. С учетом $Y=X=\Phi$ формула (5) преобразуется в

$$\Phi^n + \Phi - 1 = 0 \quad (6)$$

Значения $\Phi = \Phi_n$, характеризующие соотношение вещества и “пустоты” в системе, вычисленные по формуле (6) при разных целых $n \geq 1$, приведены в табл.1 [4].

Таблица 1

Значения Φ_n при разных n

n	Φ_n	n	Φ_n	n	Φ_n
1	0,5	8	0,81165	16	0,87727
2	0,61803	9	0,82430	17	0,88191
3	0,68233	10	0,83508	18	0,88624
4	0,72449	11	0,84440	20	0,89390
5	0,75488	12	0,85255	23	0,90338
6	0,77809	14	0,86618	27	0,91338

Формула (6) действительна при всех n от 0 и выше. Целые n соответствуют четким границам между фазовыми состояниями систем, разным траекториям их развития; дробные включают в себе причудливый мир фракталов.

Каждая система представляет собой сложную, многоуровневую иерархию взаимодействующих частиц и каждому уровню n соответствует своя идеальная (золотая) пропорция, свое Золотое сечение Φ_n (или $\varphi_n = 1/\Phi_n$). Их совокупность составляет последовательность Обобщенных Золотых сечений (ОЗС) [4, 5]. По определению открывшего ее Э.М. Сороко [4]*, ОЗС есть “инварианты на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоническое строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную устойчивость”.

Величины n – это натуральные числа, первоэлементы счисления в классической математике, ее основания. Поэтому формулу (6) (и табл.1) можно трактовать еще шире: как выражение соответствия первоэлементов классической и некой другой, “параллельной” математики, основанной на Золотых сечениях – Математики Гармонии по терминологии одного из основоположников и лидера этого научного направления А.П. Стахова [5]. Сущностная разница между ними в том, что натуральный ряд чисел отражает внешнюю сторону системы, ее количественный состав, а ряд ОЗС – ее внутреннюю структуру, качество. В то же время, ОЗС можно рассматривать и как своего рода *натуральные числа, лежащие в основании всей Математики Гармонии*.

ОЗС включают две константы, большую (характеристическую) Φ и меньшую $1-\Phi = \Phi^n$, сосуществующие как дихотомия, в режиме единства и противостояния. Они определяют соотношение свободной $1-\Phi$ и связанной Φ энергии на каждом структурном уровне n . С увеличением n растет связанная энергия (и энтропия) и уменьшается свободная (и негэнтропия).

Все ОЗС, кроме первого $\Phi_1=0,5$, иррациональные числа. Поэтому равенство ОЗС реальным величинам может быть *только приближенным* (обычно его принимают точным при совпадении не менее двух знаков после запятой – 0,62 (0,38); 0,68 (0,32)...).

Из формулы (6) величина Φ не определяется, но ее можно найти по ее графику на **рис.3**, как функции $\Phi = \Phi_n$ от n . Анализ показал, что в области $n \geq 1$ хорошее совпадение (до десятых долей процента) с табличными значениями Φ дает выражение:

$$\Phi_n = (\Phi_{n-1})^z, \quad z=0,5^{1/n}, \quad (7)$$

что подтверждается табл. 2.

Значения Φ_n при $n < 1$ равны $(1 - \Phi_n)$ для $1/n$ при $n > 1$. Например, величины Φ_n для $n=0,5$; 0,33 и 0,25 равны, соответственно, $0,38=1-\Phi_2$; $0,32=1-\Phi_3$ и $0,28=1-\Phi_4$. Кроме того, при $0,05 < n < 10$ достоверна одинаковая логарифмическая аппроксимация обеих функций: $\Phi(1/n)$ – рис. 4а и $\Phi(n)$ - рис.4б.

Таблица 2

Значения Φ_n , найденные по табл.1 -I и рассчитанные по формуле (7) -II.

n	1	2	6	10	16	20	23	27
Φ_n - I	0,5	0,618	0,778	0,835	0,877	0,894	0,903	0,913
Φ_n - II	0,5	0,613	0,776	0,834	0,875	0,892	0,901	0,911

В области $n > 1$ зависимость $\Phi_n(n)$ дает представление о росте вещества в системе, связывании его в целое, а $\Phi_n(1/n)$ – деградации системы, постепенного ее распада вследствие накопления разрывов связей частиц. Сказанное справедливо и для области $n < 1$, где вероятно

существование не фиксируемых наблюдениями частиц (меньших элементарной), но в этом случае и речь может идти не о реальном их росте или деградации, а о их вероятности.

Обнаружена связь ОЗС с относительной долговечностью твердых (“мерзлых”) тел, в частности мерзлых грунтов и льда [6]:

$$(\tau_3 / \tau)^{j_{пл}} = \xi = (P / P_M), \quad (8)$$

где P – давление на мерзлое тело; P_M – максимальное давление, которое это тело может выдержать в течение элементарного времени; τ_3 - минимальный (элементарный) отрезок времени, измеряемый в данном опыте (в пределе $\tau_3 = \tau_a$); τ – долговечность (время до разрушения); $j_{пл} = 0,083$ – предельная деформация, равная относительному уменьшению объема льда при плавлении, совпадающая с частотой месячных оборотов в годовом цикле ($1/12 = 0,083$; $30^\circ/360^\circ = 0,083$).

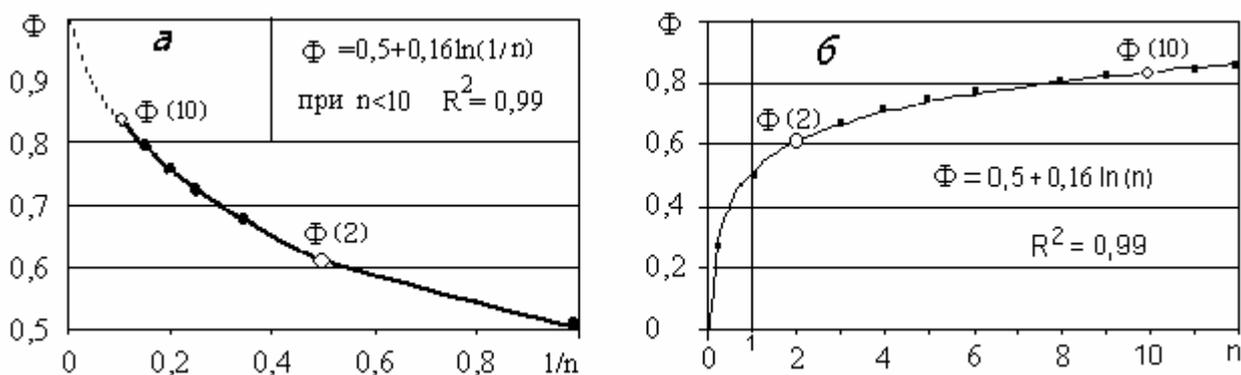


Рис. 4. Зависимости Φ от $1/n$ (рис. 4а) и Φ от n (рис. 4б); точки – данные табл.1, формулы и кривые на графике – их аппроксимации, R^2 – достоверность аппроксимаций.

В табл.3 приведены: значения первых одиннадцати (табл.1) ОЗС, относительной долговечности τ / τ_3 и $(\tau_3 / \tau)^{0,083} = \xi$. Величины τ / τ_3 представлены последовательностью, первый член которой равен 4380, второй в 12 раз меньше –365, а начиная с третьего она превращается в геометрическую прогрессию: $365/4^1=91$; $365/4^2=46$; $365/4^3=30$; $365/4^4=23$; $365/4^5=18$; $365/4^6=15$; $365/4^7=13\dots$, инвариантом которой является четверть орбиты вращательных циклов Земли, примерно 90° , совпадающая с продолжительностью основных фаз, образуемых вращением Земли (весна, лето, осень, зима или утро, день, вечер, ночь). Эти числа также почти совпадают с календарными отрезками года (полугодием, кварталом, месяцем и т.п.). Например, если принять $\tau_3=1$ час, то эти числа, до 6-го включительно, примерно соответствуют количеству часов в полугодии, в полумесяце, в полунеделе, в четверти недели, в ее шестой части и в сутках. При $\tau_3=1$ сутки эти же числа (4380, 365, 91, 46,

30 и 23) соответствуют количеству суток: в 12(11) годах (цикл солнечной активности Вольфа), в году, в квартале, в половине квартала, в месяце и в четверти квартала.

Таблица 3

Значения ОЗС (Φ_n), τ/τ_3 и $\xi=(\tau_3/\tau)^{0,083}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Φ_n	0,5	0,618	0,682	0,724	0,755	0,778	0,796	0,812	0,824	0,835	0,844
τ/τ_3	4380	365	91	46	30	23	18	15	13	11	10
ξ	0,497	0,613	0,687	0,728	0,753	0,771	0,79	0,800	0,810	0,820	0,846

Как видно из табл.3, разница между величинами ОЗС и ξ , рассчитанными для выделенных отношений τ/τ_3 , составляет сотые доли процента. Так как границы между частицами тела являются концентраторами напряжений и вакансиями разрушения, то увеличение их числа (увеличение n) сопровождается уменьшением долговечности τ/τ_3 , как это и следует из табл.2. Таким образом, странное, на первый взгляд, совпадение ОЗС с относительной прочностью мерзлого тела $\xi=(P/P_M)$ получает вполне материалистическое объяснение.

Согласно формуле (6), все члены последовательности ОЗС обладают замечательным свойством – результаты их возведения в степень n и вычитания из единицы одинаковы: 1) $0,5^1 = 0,5$ и $1 - 0,5 = 0,5$; 2) $0,618^2 = 0,372$ и $1 - 0,618 = 0,372$; 3) $0,682^3 = 0,318$ и $1 - 0,682 = 0,318$ и т.д. Из этого следует, что связанная энергия, использованная на производство вещества, равная производству $X \cdot X \dots = X^n$, и свободная энергия ($Y = 1 - X^n$) в равновесном состоянии равны. Тогда учитывая, что на каждом шаге (цикле) развития связывается энергия, бывшая свободной на предшествующем шаге, пошаговый алгоритм развития, например двухкомпонентной системы (n=2) выглядит так: **первый шаг** – $X_1 = X \cdot X = X^2$ (энергия связывания вещества), $Y_1 = 1 - X_1^2$ (оставшаяся или свободная энергия); **второй шаг** – $X_2 = Y_1 = 1 - X_1^2$, $Y_2 = 1 - X_2^2 = 1 - (1 - X_1^2)^2$; **третий шаг** – $X_3 = Y_2$, $Y_3 = 1 - X_3^2$; ... и т.д.

Модель пошагового (циклического) развития показана на рис.5, согласно которому близкие к равновесию системы развиваются в “коридоре” между $1-\Phi$ (вход в коридор) и Φ (выход) в режиме колебаний около отметки 0,5. Это область зрелости системы, где ее развитие гармонично, производство энтропии минимально, а жизнеспособность максимальна. Протяженность этой области зависит от точности задания Φ и количества частиц n в системе. Чем она точнее, т.е. чем больше в ней знаков после запятой, тем длиннее этот коридор. В приведенном примере уточнение начального значения $X = \Phi_2$ увеличивает длину коридора гармонии, которую можно интерпретировать как долговечность системы, более, чем втрое (см. пунктирные вертикали на рис.5). Количество знаков после запятой в величине Φ видимо

определяет “жизнеспособность” системы, ее способность длительное время совершать гармонические (полностью обратимые, упругие) колебания в интервале $(1-\Phi) \dots \Phi$, т.е. устойчиво функционировать. Что касается n , то с его увеличением растет ширина коридора гармонии, но убывает пространство свободной энергии, нужной для воспроизводства. Чем больше n , а значит и частиц в системе, тем меньше ее долговечность – сравните графики *a* и *б* на рис.5 (см. также табл. 2). При одинаковом числе знаков после запятой максимум долговечности системы достигается при $n=2$, в обе стороны от этого значения n она убывает.

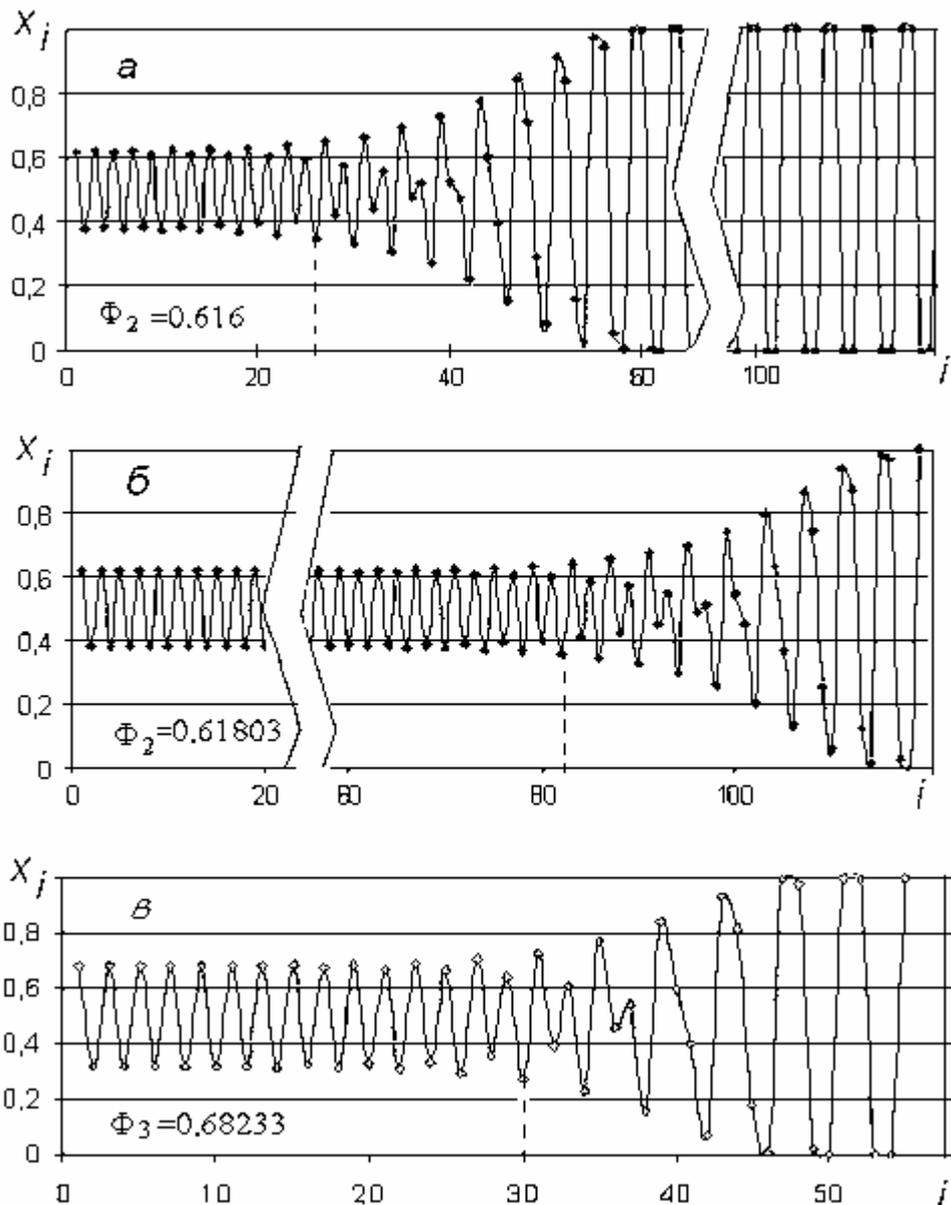


Рис. 5. Схематическая модель пошагового развития (i – число шагов (циклов)); *a* – при $X = \Phi_2 = 0,616$; *б* – при $X = \Phi_2 = 0,61803$; *в* – при $X = \Phi_3 = 0,68233$)

Ширину коридора гармонии, можно сопоставить со стадией зрелости в эволюционном (жизненном) цикле на рис. 2, когда система обладает максимальной производительностью, жизнеспособностью и устойчивостью; оба этих отрезка ограничены одинаковыми

пространственно-временными пределами, равными константам ОЗС - $(1 - \Phi_n)$ и Φ_n , при всех n имеющими одну и ту же ось симметрии $\Phi_1 = 0,5$. В терминах механики стадия зрелости соответствует линейной (стационарной) ползучести деформируемого тела, когда скорости деформации и энтропии постоянны и минимальны за весь эволюционный цикл. Причем Φ_n – пороговая точка, за которой начинается необратимое разрушение системы.

Вообще понятие устойчивости перегружено разными смыслами. Чаще всего под устойчивостью подразумевают способность системы сохранять или самостоятельно возвращать свое начальное состояние. Это понятие родственно понятию равновесия: система настолько же устойчива, насколько равновесна. Максимальная устойчивость (устойчивое равновесие) достигается при $n=1$ ($\Phi_1 = 0,5$), когда доли вещества и “пустоты” одинаковы, но в этом случае вещественная часть системы вырождается в монолит, сплошное тело, реальное или отраженное, в котором нет субъектов самоорганизации – частиц, отсутствует всякое движение и метаболизм. Способность самоорганизации (гармонии), которую можно сопоставить с упругостью, появляется при $n>1$, достигает максимума при $n=2$ и затем, как и устойчивость естественно убывает с увеличением числа взаимодействующих компонентов (n). Поскольку с увеличением n устойчивость (и равновесность) убывает от 1 до 0, то для ее определения удобно использовать отношение $1/n = \eta$, показывающее во сколько раз уменьшилась устойчивость при данном n по сравнению с максимальным (единичным) значением. Абсолютная устойчивость системы, отвечающая постоянному пребыванию в гармоническом состоянии, недостижима, так как Φ - число с бесконечным количеством знаков после запятой. При любой точности задания величины Φ стенки коридора однажды начинают расходиться, связи между частицами рвутся и каждая из них переходит на свободные колебания между 0 и 1, в состояние типа броуновского движения. Такое состояние в философии называют “дурной бесконечностью”. Это понятие, введенное Гегелем, относится к представлению о развитии природы как о бесконечной череде круговоротов материи с постоянным возвратом к одним и тем же исходным пунктам. Диалектический материализм “исходит из признания неисчерпаемости материального мира, существования бесчисленного множества различных уровней структурной организации материи, вечного саморазвития и качественных изменений материи и форм ее движения” [7]. Натуральный ряд чисел Математики Гармонии – ОЗС, как раз и дает возможность количественной оценки этого “бесчисленного множества качественных изменений материи и форм ее движения” в конечных величинах, вполне реальных для данного уровня развития науки и техники.

Таким образом, гармония невозможна без определенной доли хаоса (свободы, неустойчивости, неравновесности), увеличивающейся с ростом числа частиц (n) в системе. Эта доля и отражается в величинах ОЗС.

“Фибоначчиевы” последовательности. Совокупность колебаний в пределах коридора гармонии $[(1 - \Phi_n) \dots \Phi_n]$ составляет геометрическую прогрессию с постоянным множителем $\varphi_n = 1/\Phi_n$. Как в классической математике, используя натуральные числа в качестве множителя, можно составить бесчисленное множество геометрических прогрессий, так и в Математике Гармонии, используя ее аналоги натуральных чисел – ОЗС, также можно составить бесчисленное множество рядов типа известной последовательности Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... , которая примерно с 6-го члена переходит в геометрическую прогрессию с множителем, равным $\varphi_2 = 1,62$ [5]. Последовательности, подобные “фибоначчиевой”, составляются для любого (n) ОЗС по простому правилу: количество единиц, с которых начинаются такие последовательности должно совпадать с порядковым номером ОЗС (с количеством частиц в системе n), а последующие члены (F_m), считая от последней единицы, определяются по формуле:

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-n}$$

Для первого, второго, третьего и четвертого членов ОЗС согласно этому правилу получаются следующие ряды: 1) 1, 2, 4, 8, 16, 32...; 2) 1, 1, 2, 3, 5, 8... (собственно ряд Фибоначчи); 3) 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60...; 4) 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, 36... (подчеркнуты единицы, указывающие на количество частиц в системе). Например: 7-й член 4-го ряда равен: $F_7 = F_6 + F_{7-4} = 7 + 3 = 10$; 9-й член 3-го ряда равен: $F_9 = F_8 + F_{9-3} = 19 + 9 = 28$. Нетрудно удостовериться, что частное от деления последующего члена на предыдущий в этих рядах стремится (в первом ряду равно), соответственно, к первому ($\varphi_1 = 2$), второму ($\varphi_2 = 1,62$), третьему ($\varphi_3 = 1,47$) и четвертому ($\varphi_4 = 1,38$) членам последовательности ОЗС. Проще говоря, последовательность ОЗС важнее “фибоначчиевых” рядов, она их родительница.

Подобные последовательности, в которых каждый последующий член больше предшествующего примерно в φ_n раз, можно использовать для описания фазы (полуцикла) становления (созревания) системы (рис.2). Для описания фазы старения (деградации) можно использовать обратные последовательности, убывающие, в которых каждый последующий член меньше предшествующего примерно в φ_n раз, например, обратную последовательность Фибоначчи: 1, 1, 0,5, 0,33, 0,2, ...

Получена предельная формула для определения любого члена фибоначчиевых последовательности F_m для всего ряда ОЗС: $F_m = (\Phi_n)^m$ [8].

Золотое сечение. Собственно Золотым сечением (ЗС) называется $\Phi_2 = 0,618$ - наиболее часто встречающаяся пропорция близких к равновесию оппозиций во многих системах мира, известная с древности [4, 5]. Это энергетически самое выгодное, оптимальное их соотношение, обеспечивающее устойчивость и длительное существование (долговечность) системы. Золотое

Сечение (ЗС) делит единичное целое на две неравные части так, что отношение большей части к целому равно отношению меньшей части (1-Ф) к большей (Ф):

$$\Phi/1 = (1-\Phi)/\Phi = 0,618/1=0,382/0,618 = 0,618 \quad (9)$$

Формула (9) в том виде, как она записана, справедлива только для n=2. Для применимости (9) ко всем ОЗС перепишем ее в обобщенном виде, не влияющем на результат расчета Φ_2 :

$$(\Phi_n/1)^{(n-1)} = [(1-\Phi_n)/\Phi_n] = (0,618/1)^{(2-1)}=0,382/0,618=0,618 \quad (10)$$

Например, для n=3 имеем $(0,68/1)^2=(0,32/0,68) =0,46$; для n= 8: $(0,81/1)^7 = 0,19/0,81=0,23$. Т.е. (9) является частным случаем (10) при n = 2.

Вообще в любой системе взаимодействие частиц обычно сводится к противостоянию доминантной и не доминантной групп (ср. с социальными дихотомиями – большинства и меньшинства, “левых и правых”, богатых и бедных), и для установления закономерностей ее развития можно рассматривать взаимодействие только этих групп, а не всех частиц в отдельности [6]. Сама последовательность ОЗС в табл.1 указывает на быстрое уменьшение разницы между ее членами с возрастанием n, а табл.2 и рис.5 - и на сокращение их долговечности и, соответственно, устойчивости. Отсюда и более частая встречаемость и преимущественная значимость для функционирования системы именно ЗС ($\Phi_2 = 0,618$) по сравнению с другими ОЗС.

Проявления ОЗС, вариант I. Можно выделить по крайней мере два варианта проявления ОЗС. Первый – когда взаимодействие параметров системы описывается формулой (6), т.е. сами параметры принимают значения Φ_n и $(1-\Phi_n)$. Это возможно, если рассматривается не весь процесс изменения (развития), а его отдельные состояния, срезы. В этих случаях Φ_n является константой *состояния*. Во втором варианте, когда описывается взаимодействие изменяющихся параметров, Φ_n является константой этого *процесса*.

Проявления ЗС в самых разных системах, взаимодействие параметров которых описывается непосредственно уравнением (6), широко известны [4-6, 8 и др]. Дополним их еще несколькими примерами.

I. Закономерностям ЗС подчиняются соотношения точек на шкале Цельсия, важных для существования воды – основного материала растений и организмов вообще.

Жидкая фаза воды конденсировалась из пара при остывании поверхности Земли ниже 100°C и перейдет в твердую при 0°C. “Путь” до достижения максимальной активности, совпадающей с температурой минимальной теплоемкости – +37°C [9] (эта температура близка

к температуре тела высших животных), составляет $100-37=63^\circ$. Соотношения $63/100 = 0,63$ и $37/100 = 0,37$ равны константам ЗС.

2. При высоких давлениях обычная вода не замерзает до минус 22°C [10]. Расстояние на температурной шкале до этого предела от 37°C равно 59° , а от $0^\circ - 22^\circ$; относительные расстояния, рассчитанные по формуле (1), $22/59=0,37$ и $(59-22)/59=0,63$ также отвечают пропорции ЗС.

3. Максимальные значения индекса сухости в обоих полушариях приурочены примерно к 22-й параллели, на этой же широте в Северном полушарии наблюдаются и минимумы продукции растительного покрова и запасов фитомассы [11]. Угловое расстояние этой параллели от южного полюса Земли равно $(90+22)/180= 0,62$, от северного- $(90-22)/180= 0,38$.

4. Пропорция распределения основных статей расхода воды, поступающей на сушу из атмосферы: осадки 73 см, полный сток 26 см, испарение 47 см [12], также близка к величине ЗС: $47 / 73 = 0,64$; $26 / 73 = 0,36$.

5. Среднеширотная температура воздуха равна 16°C ; изолиния этой температуры проходит примерно по 35° с.ш. [13], которая делит угловое расстояние между экватором и северным полюсом на две части: $0,39$ и $0,61$.

6. Основными показателями упругих свойств льда, как и других твердых тел, являются модули продольной и поперечной (сдвиговой) деформации – E и G . Их величины напрямую связаны со скоростью продольных волн в стержнях – $v_{пр} = (E/\rho)^{0,5}$ и поперечных волн в неограниченной среде $v_{сд.н} = (G/\rho)^{0,5}$ (где ρ – плотность материала), возникающих при динамических нагрузках и распространяющихся со скоростью звука. Сопоставляя формулы $v_{сд.н}$ и $v_{пр}$, получаем отношение $G/E = (v_{сд.н}/v_{пр})^2$.

Упругость земной коры оценивается по скорости продольных и поперечных волн в неограниченной среде – $v_{пр.н}$ и $v_{сд.н}$.

В табл. 4 приведены значения $v_{сд}$ и $v_{пр}$ льда и других твердых тел [9], а также величины отношений $v_{сд}/v_{пр}$, G/E и $v_{сд}/v_{пр.н}$. Таблица показывает, что $v_{сд}/v_{пр}$ и G/E очень близки к пропорциям ОЗС при $n=2$ ($\Phi_2= 0,62$ и $1-\Phi_2=0,38$), а $v_{сд}/v_{пр.н}$ близки к пропорции ОЗС при $n=1$ ($\Phi_1=0,5$ и $1-\Phi_1=0,5$).

Таблица 4.

Соотношения скорости поперечных (сдвиговых) и продольных волн и модулей упругости в твердых телах, а также в Земле на глубинах: 1-33 км и 2-2000 км

Материал	$v_{сд.н}$, м/с	$v_{пр}$, м/с	$v_{пр.н}$, м/с	$v_{сд.н}/v_{пр}$	G/E	$v_{сд.н}/v_{пр.н}$
Лед	1990	3280	3980	0,61	0,37	0,5
Железо	3230	5170	5850	0,62	0,38	0,55
Медь	2260	3710	4700	0,61	0,37	0,48
Никель	2960	4785	5630	0,62	0,38	0,52

Олово	1670	2730	3320	<i>0,61</i>	<i>0,37</i>	<i>0,5</i>
Цинк	2410	3810	4170	<i>0,63</i>	<i>0,40</i>	<i>0,58</i>
Фарфор	3120	4884	5340	<i>0,64</i>	<i>0,41</i>	<i>0,58</i>
Известняк	3200	-	6130	-	-	<i>0,52</i>
Земля -1	4630	-	8180	-	-	<i>0,57</i>
Земля -2	6930	-	12790	-	-	<i>0,54</i>

В Интернете можно найти много других аналогичных примеров проявления ЗС.

Проявления ОЗС, вариант II. При описании взаимодействия изменяющихся параметров, ОЗС проявляются посредством численных констант соответствующих уравнений. Покажем это на примере систем различной природы - климатических, ботанических и др.

1. Годовой цикл температуры воздуха в умеренном и холодном поясах состоит, в свою очередь, из двух меньших циклов, теплого и холодного, разделенных весенним и осенним нулями ($^{\circ}\text{C}$). В табл.5 и 6 приведены размерные t и безразмерные j_t среднемесячные температуры воздуха на подъеме и спаде теплого периода года, а также времени, размерного τ (месяцы от начала года) и безразмерного j_τ на юге (Тобольск) и севере (п. Нумто) Тюменской области по данным [2]. Безразмерные параметры вычислены по формуле (1). Отметим, что продолжительность теплого периода – около 6 месяцев в Нумто и 7,5 месяцев в Тобольске соотносится с продолжительностью года ($6/12 = 0,5$ и $7,5/12 \approx 0,62$) как 1-й и 2-й члены ОЗС.

Таблица 5.

Значения τ (время от начала года, мес), t ($^{\circ}\text{C}$), j_τ , j_t в Тобольске и Нумто (курсив) на подъеме в теплое время года

τ	3,75	4	5	6	7	<i>4,95</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
t	0	1,8	9,1	15,8	18	<i>0</i>	<i>0,2</i>	<i>10,5</i>	<i>15,5</i>
j_τ	0	0,08	0,38	0,69	1	<i>0</i>	<i>0,02</i>	<i>0,51</i>	<i>1</i>
j_t	0	0,07	0,51	0,88	1	<i>0</i>	<i>0,01</i>	<i>0,68</i>	<i>1</i>

По данным табл.5 и 6 построены графики зависимости j_t от j_τ и найдены их аппроксимации (с помощью программы EXCEL) - **рис. 6** в форме полинома 2-й степени:

$$j_t = A \cdot j_\tau^2 + B \cdot j_\tau \approx A \cdot j_\tau^2 + (1-A) \cdot j_\tau, \quad (10)$$

где A и B – постоянные, причем для выпуклой кривой $A \approx -\Phi_2$, для вогнутой $A \approx \Phi_2$, а $B \approx 1-A$.

Таблица 6.

Значения τ (мес), t ($^{\circ}\text{C}$), j_τ , j_t в Тобольске и Нумто (курсив) на спаде в теплое время года

τ	7	8	9	10	10,3	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>9,8</i>
t	18	15,4	9,5	0,8	0	<i>15,5</i>	<i>12,4</i>	<i>6,4</i>	<i>0</i>
j_τ	0	0,30	0,61	0,91	1	<i>0</i>	<i>0,36</i>	<i>0,71</i>	<i>1</i>
j_t	0	0,14	0,47	0,91	1	<i>0</i>	<i>0,20</i>	<i>0,59</i>	<i>1</i>

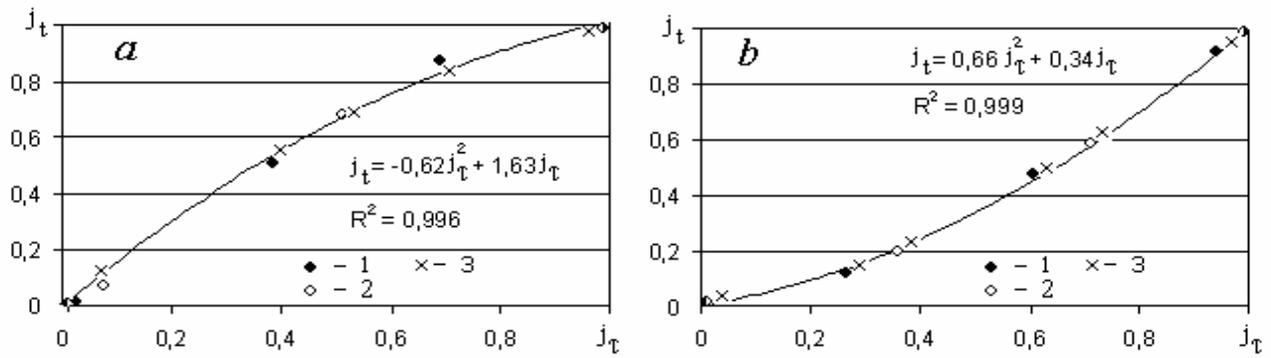


Рис. 6. Зависимость j_t от j_τ , в Тобольске (1) и Нумто (2) на подъеме (a) и спаде (b) в теплое время года (3 – расчет по формуле (10) при $A = -0,62$ в варианте a и $A = 0,62$ в варианте b)

Из рис.6 видно, что обе ветви климатического цикла хорошо описываются полиномом 2-й степени с коэффициентом A , равным ЗС (Φ_2): $-0,62$ на подъеме и $0,62$ на спаде.

Анализ и расчеты показали, что полиномиальные формулы с положительным и отрицательным коэффициентами (Φ_2 и $-\Phi_2$) с приемлемой погрешностью можно заменить степенными, вида

$$j_y = j_x^\Gamma \quad (11)$$

с показателем степени Γ равным $1,618$ для вогнутых кривых, отображающих “ускоряющийся” характер связи, или $0,618$ для выпуклых, отображающих “замедляющийся” характер связи

Хорошая сходимость результатов, вычисленных по полиномиальным и степенным формулам с “золотыми” коэффициентами (при $n=2$), подтверждается **рис. 7**. Расчеты показали, что и при других n степенные и полиномиальные формулы дают близкие результаты, особенно при описании вогнутых кривых. При этом показатель степени Γ равен $1+\Phi_n$ при описании вогнутых кривых и $\Gamma=\Phi_n$ при описании выпуклых. Идентичность степенных и полиномиальных формул более актуальна для вогнутых кривых. Это видно из табл.7, в которой приведены результаты расчетов по этим формулам, представленным нормализованными функциями $j_y(j_x)$. У выпуклых кривых разница между результатами расчетов по полиномиальным и степенным формулам при увеличении n в отличие от вогнутых, возрастает, при $n=4$ она около 15%, при $n=7$ – все еще 22%. При $n=0$ полиномиальные и степенные формулы как вогнутых так и выпуклых кривых превращаются в линейную вида $Y=X$ (наклонная прямая на рис. 7).

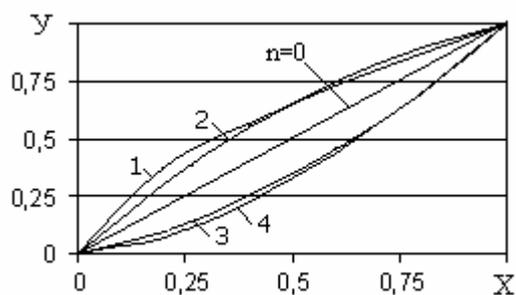


Рис. 7. Графики полиномиальной и степенной формул выпуклой (2 и 1) и вогнутой (3 и 4) кривых произвольной функции Y от X .

Таблица 7

Зависимость j_y от j_x в полиномиальных (п) и степенных (с) формулах при n , равных 0; 2; 7 и ∞ для вогнутых кривых

j_x	$j_{y.п(0)}$	$j_{y.с(0)}$	$j_{y.п(2)}$	$j_{y.с(2)}$	$j_{y.п(7)}$	$j_{y.с(7)}$	$j_{y.п(\infty)}$	$j_{y.с(\infty)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,2	0,2	0,1	0,07	0,07	0,06	0,04	0,04
0,4	0,4	0,4	0,25	0,23	0,21	0,19	0,16	0,16
0,6	0,6	0,6	0,45	0,44	0,41	0,4	0,36	0,36
0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,67	0,67	0,64	0,64
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Степенные формулы типа (11) сводятся к линейным общего вида $Y' = \Gamma \cdot X'$, где $Y' = \ln(y)$, $X' = \ln(x)$. Поэтому, несмотря на меньшую точность по сравнению с полиномиальными, они удобней для расчетов и экономичней, поскольку для определения неизвестного постоянного Γ , достаточно знать всего одну любую пару соответственных размерных значений y и x , тогда $\Gamma = \ln(y) / \ln(x)$.

2. В [14] установлен количественный вид зависимости массы (m) древесной зелени (хвои и не одревеневших побегов) и отдельно хвои сосны обыкновенной (*Pinus Sylvestris*) от ее диаметра (d) в северной и средней тайге на территории Республики Коми для всех встречающихся в ней типов леса. Это крупное исследование, базирующееся на обобщении сотен определений характеристик деревьев. Для выражения результатов в размерном виде авторам [14] понадобилось более десятка формул. Покажем, что весь этот обширный материал можно обобщить одной формулой.

Максимальные и минимальные значения размерных параметров по данным [14], необходимые для расчетов по формуле (1) сведены в табл. 8.

Таблица 8

Максимальные и минимальные величины диаметра ствола - d_{max} , d_{min} (см), массы зелени (z) и хвои (x) сосны - m_{max} , m_{min} (кг / дерево)

Подзона	d_{min}	m_{min}	$d_{max}(z)$	$m_{max}(z)$	$d_{max}(x)$	$m_{max}(x)$
Север. тайга	0	0	40	91	40	63
Средн. тайга	0	0	40	76	40	46

На **рис. 8** приведены построенные нами по этим данным графики зависимости безразмерной массы древесной зелени и хвои $j_m = m / m_{\max}$ сосны от безразмерного диаметра ствола $j_d = d / d_{\max}$ в северной и средней тайге и найдены их аппроксимации, как и выше в виде полинома 2-й степени.

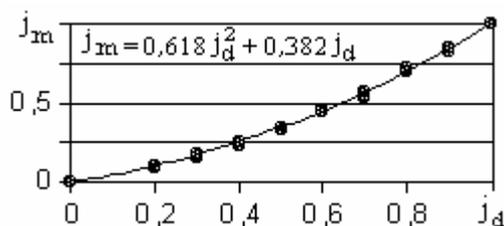


Рис 8. График зависимости $j_m(j_d)$ и формула кривой (значки – экспериментальные точки)

Значения коэффициентов А и В в (10), а также Г в (11) для массы зелени и хвои в северной (1з, 1х) и средней (2з, 2х) тайге даны в табл.9

Таблица 9

Значения коэффициентов в формулах (10) и (11)

Индекс	1з	1х	2з	2х	ЗС
А	0,610	0,648	0,651	0,673	0,618
В	0,393	0,357	0,340	0,329	0,382
Г	1,61	1,647	0,652	0,672	0,618

Достоверность аппроксимации для всех вариантов высокая - $R^2 \geq 0,998$.

Экспериментальные точки на рис. 8 при всех вариантах условий практически сливаются друг с другом, т.е. зависимость $j_m(j_d)$ инвариантна. Численные коэффициенты формул практически равны константам ЗС. Максимальное отличие А от Φ_2 всего 8%.

График на рис. 8 или формулы (10)-(11) можно использовать для приближенного определения обобщенной массы древесной зелени хвойных деревьев в пределах всей таежной зоны. Порода дерева и условия произрастания будет отражена в величинах соответственных пар d_{\max} и m_{\max} . Например, нужно определить массу хвои у сосны с диаметром ствола 0,32 м; максимальные диаметр и масса хвои известны: 0,45 м и 65 кг. Вычисляем $j_d = 0,32/0,45 = 0,71$. По формуле (10) при $A=0,618$ находим безразмерную массу хвои: $j_m = 0,618 \cdot 0,5 + 0,382 \cdot 0,71 = 0,58$, а затем и размерную: $m = 65 \cdot 0,58 = 37,7$ кг. Аналогично по формуле (11): $j_m = 0,71^{1,618} = 0,574$; $m = 65 \cdot 0,574 = 37,4$ кг.

3. На графиках **рис. 9** приведены примеры зависимости относительного диаметра j_d от относительного возраста $j_\tau = \tau / \tau_{\max}$ (τ - текущее время, годы; τ_{\max} – возраст дерева) в двух возможных модификациях формы кривой этой зависимости: вогнутой и выпуклой. Первая представлена теневыносливой пихтой на Аляске, вторая – теплолюбивой сосной на севере (п.

Нумто) и юге (п. Караганда) Тюменской области [15]. Величины безразмерного диаметра отложены на оси ординат, безразмерного времени – на оси абсцисс, размерного времени – на верхней горизонтальной оси. Начало отсчета на графике А – 1578 год, на графике Б – 1579 год, на графике В – 1777 год. Кривыми показан многолетний ход j_d по данным наблюдений – толстые линии, и его аппроксимации – тонкие линии. Из-за высокой достоверности аппроксимирующих формул – $R^2 > 0,99$ и те и другие почти сливаются. Как и в предыдущих случаях формулы аппроксимации представляют собой полином 2-й степени с коэффициентами близкими к ЗС. Кружками на рис.9 обозначены j_d , вычисленные по формуле (10), численный коэффициент которой равен 0,618 для вогнутой кривой и -0,618 для выпуклой.

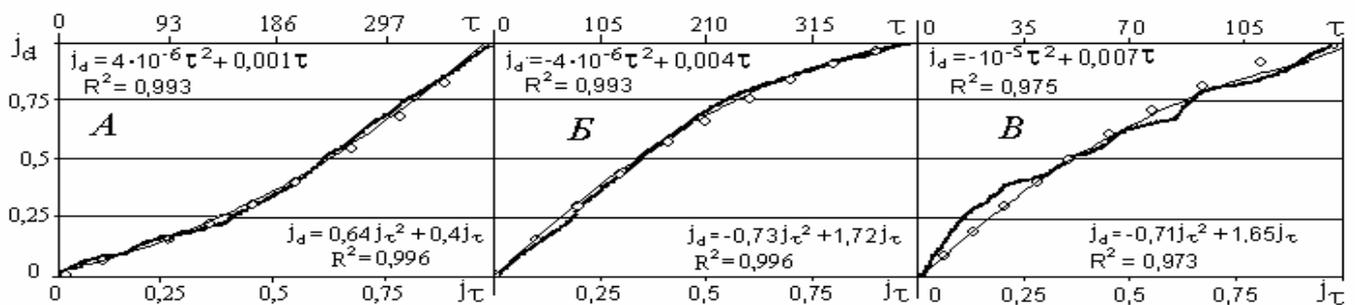


Рис. 9. Зависимость j_d от j_τ для пихты на Аляске (А) и сосны в Нумто (Б) и Караганде (В)

Несмотря на то, что численные коэффициенты в аппроксимирующих формулах несколько отличаются от констант ЗС, на величину j_d это почти не влияет – вычисленные по формуле (10) при коэффициентах, равных константам ЗС, значения j_d ложатся на кривую, построенную по фактическим данным. График и формула, подобные записанным на рис.9 Б и В, получены при обобщении данных о сезонном приросте диаметра сосны. Разница только в том, что размерное время в этом случае измеряется не в годах, а в сутках [15].

4. В табл. 10, в 2-х верхних строках, показана зависимость удельной продуктивности сосны (Р, %) от ее возраста в Приангарье по [16].

Таблица 10

Удельная продуктивность сосны (Р, %) в разном возрасте (τ , лет)

τ , лет	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
Р, %	8,6	7,6	6,1	4,8	3,9	3,2	2,5	1,9	1,4	1,1	0,8
j_τ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
j_i	0	0,13	0,32	0,49	0,6	0,69	0,78	0,86	0,92	0,96	1

Введем понятие износа дерева, под которым будем понимать разность между максимальной и текущей продуктивностью (8,6 - Р). В 3-й и 4-й строках табл. 10 записаны нормализованные значения износа дерева $j_i = (8,6 - Р) / (8,6 - 0,8)$ и возраста $j_\tau = (\tau - 15) / (115 -$

15) Как и раньше (с помощью EXCEL) находим аппроксимацию зависимости j_i от j_τ . С достоверностью $R^2 = 0,98$ она имеет вид (10) при $A = -0,79$. Выражения возрастной зависимости относительного износа и диаметра ствола практически совпадают (ср. с формулами на рис. 9Б и 9В), т.е. с увеличением размеров дерева его относительная продуктивность уменьшается, а относительный износ увеличивается.

Представляет интерес определение уровня упорядоченности (количества условных частиц) n и устойчивости $\eta = 1/n$. Для этого сначала необходимо привести константы ОЗС к стандартному виду, представляющему собой сумму двух долей единицы, большей и меньшей. Разделив совокупность численных коэффициентов в нашем уравнении $1 = -0,79 + 1,79$ на $1,79$ и получаем то, что нужно: $0,56 = -0,44 + 1$, т.е. $\Phi = 0,56$, а $1 - \Phi = 0,44$. Выражение уровня порядка (номера данного ОЗС) находим из формулы (6):

$$n = \ln(1 - \Phi) / \ln(\Phi) \quad (12)$$

Подставив в (12) $\Phi = 0,56$, получаем $n = 1,41$; $\eta = 0,71$.

5. Связи между размерными величинами фитомассы, диаметра ствола и густоты насаждений в сосновых молодняках Приангарья детально исследованы в [17]. Получены количественные выражения связей, в частности фитомассы (кг) и диаметра (см) в степенном и квадратичном виде, найдены численные коэффициенты в этих выражениях для дерева в целом и его фракций (ствола, ветвей, хвои, корней) при разной густоте насаждений ($G = 100, 180, 400, 700, 900$ тыс. стволов на гектар). Установлено [17], что при любой густоте фитомасса, в отличие от продуктивности, с увеличением диаметра растет; максимальный запас фитомассы (оптимум) наблюдается при густоте насаждений 700 тыс. стволов на гектар (G_{700}), с понижением и повышением густоты относительно этой величины, фитомасса убывает. Относительные величины фитомассы j_m разных фракций дерева и дерева в целом при одинаковых величинах относительного диаметра ствола j_d мало отличаются друг от друга. Примеры графиков зависимости j_m от j_d , рассчитанных по размерным данным [17] при G_{700} (круглые значки) и совокупности G ($G_{\text{сов}}$, сплошные прямоугольные значки) с помощью формулы (1), для хвойной фракции (**a**) и дерева в целом (**b**), представлены на **рис.10**. Верхняя кривая соответствует G_{700} , нижняя - $G_{\text{сов}}$. Как и раньше кривые с высокой достоверностью аппроксимированы как полиномиальными ($R^2 > 0,99$) так и степенными ($R^2 > 0,93$) формулами, дающими идентичные результаты. Найденные полиномиальные формулы даны на рисунках, их численные коэффициенты в сумме составляют 1, т.е. равны константам ОЗС. Значения Γ в степенных формулах, а также рассчитанные с помощью (12) номера ОЗС - n и степени устойчивости - η для хвойной фракции (x) и всего дерева ($др$), т.е. для 4 вариантов условий, скомбинированных по этим индексам и символам вариантов a и b : $a_x, a_{др}, b_x, b_{др}$, приведены в табл. 11.

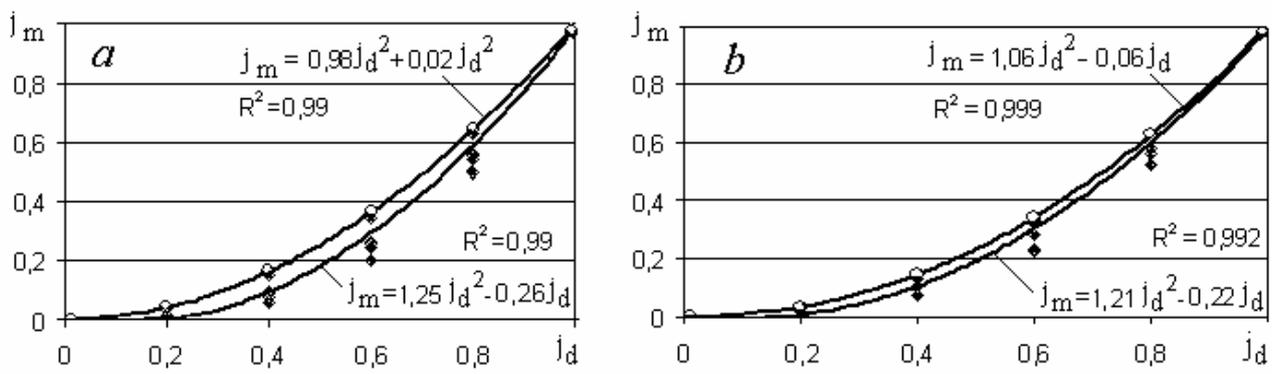


Рис. 10. Графики и формулы зависимости j_m от j_d при $G=700$ (верхняя кривая) и $G=100...900$ (нижняя) для хвойной фракции (а) и всего дерева (б).

Таблица 11

Значения Φ , $\Phi'=1/\Phi$, Γ , n и η для вариантов a_x , $a_{др}$, b_x , $b_{др}$

Символ	a_x	$a_{др}$	b_x	$b_{др}$
Φ	0,98	1,25	1,06	1,21
Φ'	0,98	0,8	0,94	0,83
Γ	1,98	2,53	2,1	2,44
n	49	7,14	45,4	8,9
η	0,02	0,14	0,022	0,11

Численные коэффициенты в правой части полиномиальных уравнений для последних трех вариантов $a_{др}$, b_x , $b_{др}$ в сумме равны 1, но сами они отличаются от стандартной формы ОЗС: в них $\Phi > 1$. Это формальное несоответствие. Для его устранения делим обе части уравнений на Φ и получаем стандартное соотношение констант в ОЗС. Например, для констант в варианте a_x (нижний график на левом рис. 8) имеем $1 \approx 1,25 - 0,24$. Делим обе части этого выражения на $\Phi = 1,25$ и получаем $0,8 \approx 1 - 0,18$ или $1 \approx 0,8 + 0,18$. Это стандартная структура ОЗС, в которой основной (большей) константой является $\Phi' = 1/\Phi = 0,8$.

Константа степенных уравнений, полученных в этих же трех вариантах, также отличается от стандартного вида, в котором $\Gamma = 1 + \Phi$. В вариантах $a_{др}$, b_x и $b_{др}$ величина $\Gamma \approx 2\Phi$ (см. табл.11): $2,53 \approx 1,25 \cdot 2 = 2,5$; $2,1 \approx 1,06 \cdot 2 = 2,12$ и $2,44 \approx 1,21 \cdot 2 = 2,42$.

6. В [18] найдены формулы связи между относительной высотой распространенных древесных пород $j_h = h / h_{max}$ (h и h_{max} - текущая и максимальная высота дерева) и их относительными диаметрами $j_d = d/d_{max}$ для условий Ленинградской области. Анализ результатов расчетов по этим формулам показал, что их можно заменить одной обобщенной формулой. На **рис.11а** дана кривая зависимости j_h от j_d (фактические данные [18] обозначены кружками, сверху вниз – для сосны, ели, березы и осины) и формула, аппроксимирующая эту зависимость (полином 3-й степени).

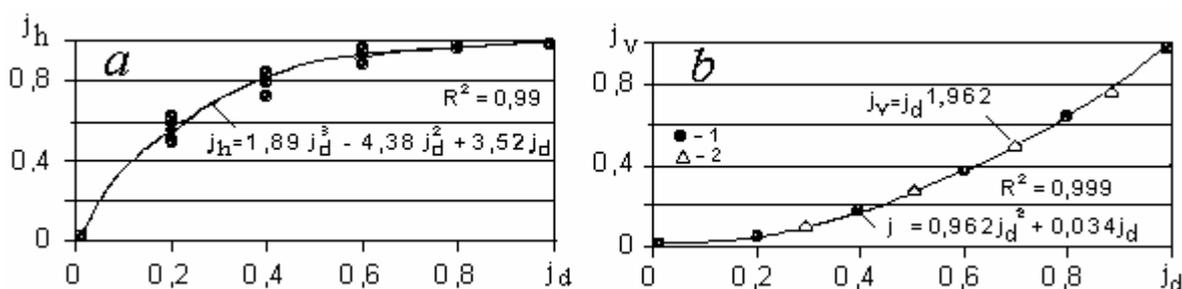


Рис. 11. Графики и формулы зависимости j_h от j_d (а) и j_v от j_d (б); 1- расчет по полиномиальной формуле, 2- то же, по степенной.

Этот пример показывает, что связь параметров системы, может описываться и полиномами больших степеней, но это не умаляет ни полезности использования для ее обобщения формулы (1), ни универсальности ОЗС. Представим сумму 3-х чисел в правой части полинома на рис.11 суммой 2-х, положительного и отрицательного: $5,41 - 4,38 \approx 1$. Разделив все на 5,41, получим выражение дихотомии $1 \approx 0,81 + 0,18$ с константой $\Phi = 0,81$, соответствующей уровню упорядоченности $n=8$ (табл.1).

При известных диаметре j_d и высоте j_h ствола несложно вычислить его объем j_v и найти зависимость $j_v(j_d)$. Эта зависимость (кривая) и ее аппроксимация полиномиальной и степенной формулами показаны на рис. 11b. Они совпадают – величины j_v , рассчитанные по обеим формулам лежат на одной кривой. Коэффициенты полиномиальной формулы в сумме равны 1, т.е. являются константами ОЗС, уровень (номер - n) которого, а также степень устойчивости определяем по формуле (12): $n = 78,8 \approx 80$, $\eta \approx 0,013$. Малая величина η свидетельствует о низком уровне устойчивости связи j_v и j_d , по-видимому, из-за того, что зависимость j_v от j_d , не является для j_v определяющей. Надо сказать, что смысловая интерпретация абстрагированных формул (6) и (12), в случаях с неявным делением системы на составные части, затруднительна.

7. Теперь приведем примеры, связанные с “неживой” природой. На **рис. 12** дан график зависимости относительной деформации (ползучести) мерзлой супеси при одноосном сжатии j_c от относительного времени j_t (по [19, 20]). Величины j_c и j_t рассчитывались по формуле (1). Максимумы и минимумы деформации в долях единицы, необходимые для расчета, приняты по данным 4-х серий опытов (при 4-х значениях давления P). Для серий **1** и **2** они взяты из [19], для серий **3** и **4** - из [20]): **1**) $12,5 \cdot 10^{-2}$ и $7,4 \cdot 10^{-2}$ – при $P_1 = 6,8$ МПа; **2**) $8 \cdot 10^{-2}$ и $4,8 \cdot 10^{-2}$ – при $P_2 = 6$ МПа ; **3**) $2,48 \cdot 10^{-3}$ и $1,9 \cdot 10^{-3}$ – при $P_3 = 0,7$ МПа; **4**) $1,8 \cdot 10^{-3}$ и $1,5 \cdot 10^{-3}$ – при $P_4 = 0,6$ МПа; максимум и минимум времени (τ , час) - 12 и 1 во всех опытах. Опыты серий 1 и 2 проведены при $t = -20^\circ\text{C}$, серий 3 и 4 – при $t = -4,5^\circ\text{C}$. Значки – экспериментальные данные, кривая **a** рассчитана по формуле (11), кривая **б** – по формуле (10) при $A = 0,62$ (ЗС).

График показывает хорошую сходимость фактических значений j_c с вычисленными по обеим формулам.

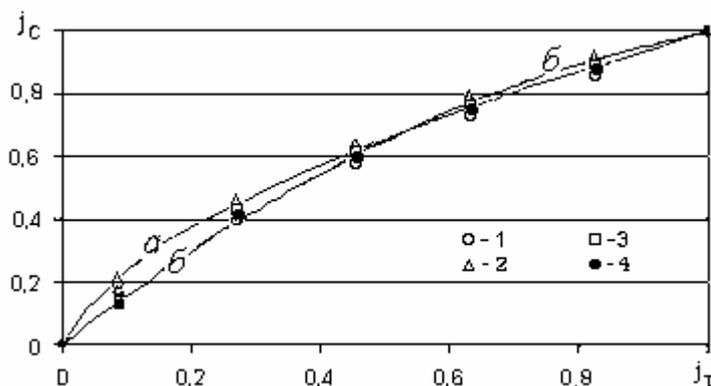


Рис. 12. Ход относительной деформации мерзлой супеси при одноосном сжатии j_c в относительном времени j_t при разных температурах и давлениях, 1...4 – обозначения серий опытов (пояснения в тексте),

8. В [19] помещен объединенный график зависимости предельно-длительной прочности смерзания глинистых пылеватых грунтов с фундаментом от температуры по результатам экспериментов российских и американских исследователей, выполненных в разных условиях (разные грунты, температуры, материал фундамента, способы его погружения). Диапазоны изменения температуры: 0 – -6 °С, прочности смерзания: 0 – 0,3 МПа. Все экспериментальные точки на этом графике располагаются достаточно тесно. На **рис.13** приведен график зависимости максимальной -1 и минимальной -2 значений относительной длительной прочности смерзания $j_{пс}$ от относительной температуры j_t . Величины $j_{пс}$ и j_t вычислены по формуле (1); кривая *a* построена по формуле (11), кривая *б* – по формуле (10) при $A=0,62$ (ЗС).

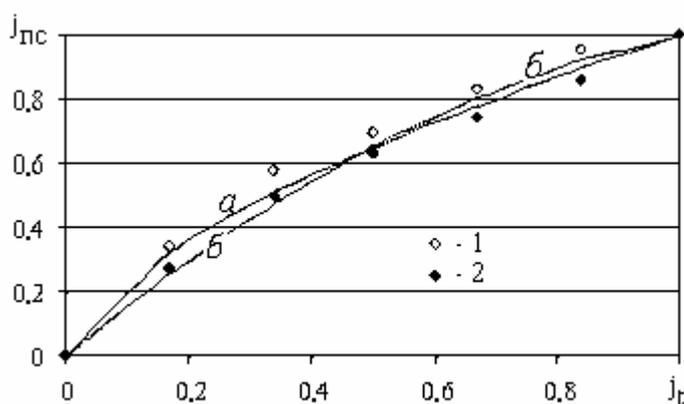


Рис. 13. Зависимость прочности смерзания глинистых грунтов $j_{пс}$ от температуры j_t в безразмерном виде (пояснения в тексте)

Как видим, безразмерные формулы зависимостей $j_{пч}$ от j_t и $j_{пс}$ от j_t практически идентичны. Их специфика в полной мере отражается в величинах любых соответственных парах функции и аргумента ($j_{пч}$ и j_t или $j_{пс}$ и j_t).

9. Ранее показана идентичность зависимости относительной температуры кристаллизации воды $j_t = t/t_3$ от относительных давления $j_p = P/P_3$ и концентрации солей $j_k = K/K_3$ [21]. Эвтектические значения t_3 , P_3 и K_3 в данном контексте имеют смысл максимальных величин в формуле (1). На **рис. 14** представлены график и степенная формула этой зависимости.

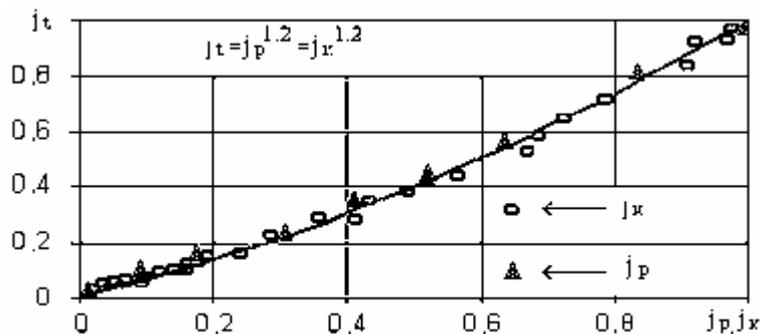


Рис. 14. Зависимость j_t от j_p и от j_k

Согласно пояснениям к формулам (11) и (10) показатель степени 1,2 в формуле на графике является членом ряда ОЗС, величина которого $\Phi=0.2$, а зависимость j_t от j_p или от j_k можно записать как в степенном, так и в полиномиальном (квадратичном) виде:

$$j_t = j_p^{1.2} \quad (13)$$

$$j_t = 0,2 j_p^2 + 0,8 j_p \quad (14)$$

Графики этих уравнений практически сливаются, поэтому сравнение расчетов по ним сделаем в числовой форме – табл.12. Сопоставимость результатов - высокая.

Таблица 12.

Расчет j_t по формулам (14) - I и (15) - II

j_p	0	0,25	0,5	0,75	1
j_t - I	0	0,19	0,44	0,71	1
j_t - II	0	0,21	0,45	0,71	1

10. Газогидраты – льдоподобные образования, широко распространенные в холодных зонах Земли – в толще вечной мерзлоты и под океаническим дном. При понижении давления они разлагаются на газ и воду. Если температура среды $T < 273$ К (0 °С), эта вода начинает замерзать, но сначала она должна пройти стадию переохлаждения. В [22] опытным путем

найдена количественная связь равновесных (метастабильных) значений температуры и давления переохлажденной воды на поверхности газогидратов. Температура в опытах изменялась от 253,2 до 272,3 К у газогидрата метана и от 264,3 до 272,2 К у газогидрата пропана; давление (P): от 0,39 до 2,34 МПа у газогидрата метана и от 0,025 до 1,41 МПа у газогидрата пропана. По этим данным с помощью формулы (1) размерные температуры и давления переведены в относительные j_t и j_p . На **рис.15** показана связь между j_t и j_p ; значки – фактические j_p для газогидратов метана (1) и пропана (2); кривая *a* – аппроксимация фактических данных. Она имеет вид (10) с $A=\Phi=0,8$. Кривая *б* – расчет по степенной формуле ОЗС типа (11). Обе формулы дают сходные результаты. По формуле (12) можно определить уровень упорядоченности этой системы (порядковый номер ОЗС), он дробный: $n = 7,2$.

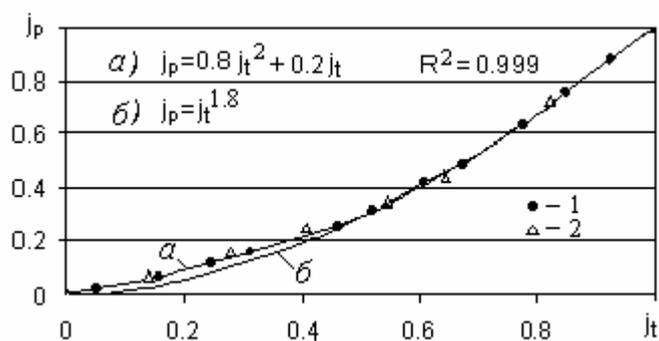


Рис. 15. Зависимость j_p от j_t (пояснения в тексте).

Заключение. Способ обобщения параметров природных систем с помощью формулы (1), судя по приведенным примерам, можно считать универсальным. Его использование сокращает объем фактических данных, необходимый для установления количественных связей между параметрами, позволяет корректно сравнивать разнородные и разноразмерные величины и делает решение, полученное для каких-нибудь одних условий, общим, пригодным для всех.

Формулы взаимосвязей монотонного типа, выраженные в относительных величинах, в большинстве случаев имеют полиномиальный (квадратичный) или степенной вид, а входящие в них численные коэффициенты близки к константам Обобщенных Золотых сечений, преимущественно высшего порядка ($n \approx 2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981, 367 с.
2. Справочник по климату СССР, вып.17, ч. II. Л.: Гидрометеиздат, 1965. С. 275.
3. Марков А.В. Взлет и падение видов: новые данные подтверждают старую идею “эволюционного цикла” // [http:// elementy.ru/news?discuss =430634](http://elementy.ru/news?discuss=430634).
4. Сороко Э.М. Структурная гармония систем, Минск: Наука и техника, 1984, 265 с.
5. Стахов А.П. Роль “Золотого Сечения” и “Математики Гармонии” в преодолении “стратегических ошибок” в развитии математики // “Академия Тринитаризма”, М., Эл № 77-

6567, публ.14688, 12.01.2008

6. Коновалов А.А., Иванов Н.С. Климат, фитопродуктивность и палиноспектры: связи, распределение и методика палеореконструкций. Новосибирск: "Гео". 2007, 130 с.
7. Философский словарь. М.: Госполитиздат, 1981, 445 с.
8. Коновалов А.А. Золотое сечение как показатель устойчивости компонентов системы. Доклады на Первом Межд. Конгрессе по Математике гармонии (Одесса, октябрь 2010). <http://sites.google.com/site/harmonymathkongress/speeches>
9. Кошкин Н.Н., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М., Наука, 1974, 255 с
10. Савельев Б.А. Гляциология. М.: МГУ, 1991, 288 с.
11. Исаченко А.Г. Ландшафтоведение и физико-географическое районирование, М.: Высшая школа, 1991, 366 с.
12. Физико-географический атлас Мира. Л.: Гидрометеиздат, 1964, 275 с.
13. Будыко М.И. Климат и жизнь, Л, Гидрометеиздат, 1971, 471 с
14. Бобкова К.С., Тужилкина В.В., Робакидзе Е.А. Ресурсная характеристика древесной зелени *Pinus Silvestris (Pinaceae)* в лесах северо-востока европейской России // Растит. ресурсы, 2008
15. Коновалов А.А., Арефьев С.П. Деформационная модель радиального роста древесных растений и ее аналитические возможности // СЭЖ, 2010, № 3, с. 22-35.
16. Артемьева А.В., Бузыкин А.И., Исмагилов А.М., Кофман Г.Б. Оценка продуктивности древостоя // Факторы продуктивности леса. Новосибирск: Наука, 1989. С. 129-146.
17. Пшеничникова Л.С. Продуктивность сосновых молодняков разной густоты // Факторы продуктивности леса. Новосибирск: Наука, 1989. С. 36-52.
18. Ледяева А.С. Обоснование оптимального раскроя хлыстов методом линейного программирования. Автореферат дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. Санкт-Петербург, 2007. 29 с.
19. Вялов С.С. Реология мерзлых грунтов. М.: Стройиздат, 2000. 464 с.
20. Роман Л.Т. Мерзлые торфяные грунты как основания инженерных сооружений. Новосибирск: Наука, 1987, 193 с.
21. Коновалов А.А. О прочности тела при температурах, близких к точке его плавления. ИФЖ, 2009, т.82, 5, с. 992-998.
22. Решетников А.М. Экспериментальное изучение метастабильных состояний при диссоциации газовых гидратов ниже температуры 273 К. Дисс. на соискание ученой степени канд. тех. наук, ИКЗ СО РАН, Тюмень, 2010, 123 с.